1.1.27 Vektory III

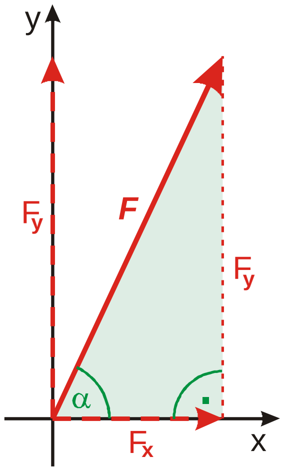
Předpoklady: 010126

Pedagogická poznámka: Příklady 3, 4, 5 je možné vynechat, důležité je, aby alespoň 15 minut zbylo na příklad 7.

Pedagogická poznámka: Úvodní příklad využívám k prozkoušení látky z minulé hodiny. Vyberu několik sešitů a ohodnotím, příklad musí umět vyřešit všichni.

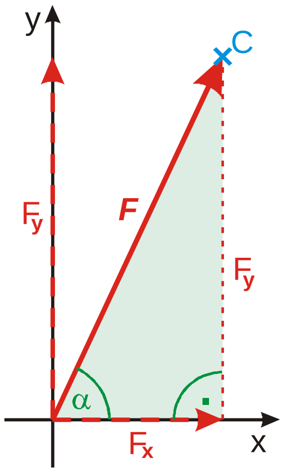
Př. 1: Síla o velikosti 53 N svírá s vodorovnou rovinou úhel 65°. Urči vodorovnou a svislou složku této síly.

Nakreslíme si obrázek:



Hledané složky vektoru tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníku:

- $\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F\cdot\cos\alpha = 53\cdot\cos 65°\,\mathrm{N} \doteq 22\,\mathrm{N}$,
- $\sin\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F\cdot\sin\alpha = 53\cdot\sin 65°\,\mathrm{N} = 48\,\mathrm{N}$.

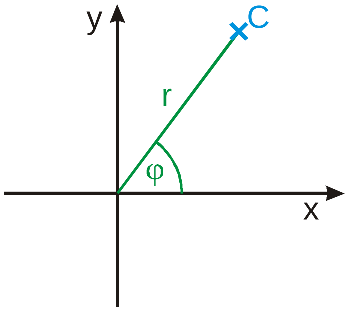


Postřeh: Složky F_x, F_y vektoru $\boldsymbol{F}$ jsou zároveň souřadnicemi bodu $C[22;48]$ (koncového bodu vektoru $\boldsymbol{F}$).
Platí to tak vždy?
Pouze, když vektor začíná v počátku souřadnic.

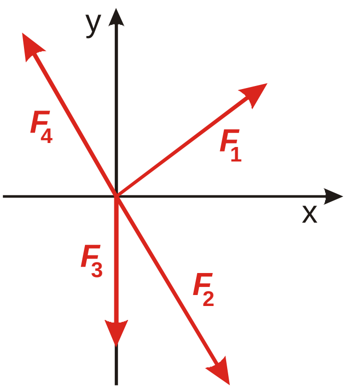
Podobně to platí i v prostoru. Zde má vektor $\boldsymbol{F}$ samozřejmě tři složky F_x, F_y, F_z.

Vektory tak můžeme zapsat pomocí jeho složek podobně jako se zapisují souřadnice bodů, jenom se používají kulaté závorky $\boldsymbol{F} = (F_x; F_y) = (22; 48)$

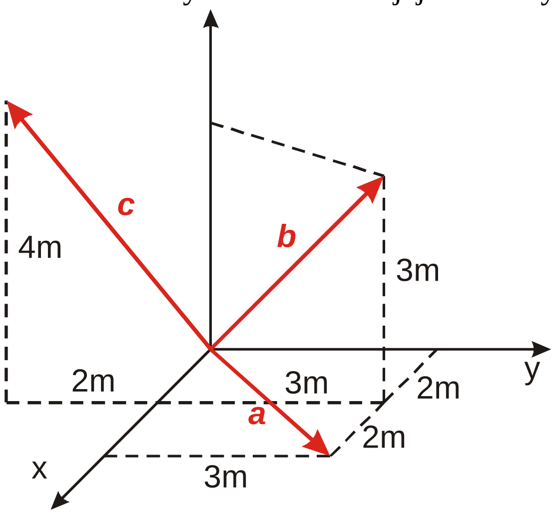
Dodatek: Vyjádření vektoru $\boldsymbol{F}$ v zadání pomocí jeho velikosti a úhlu je vlastně vyjádřením polohy bodu C pomocí jiného typu souřadnic - polárních souřadnic. Polární souřadnice určují polohu bodu v rovině pomocí jeho vzdálenosti od počátku soustavy souřadnic (označovaná *r*) a úhlu, který svírá spojnice bodu s počátkem soustavy souřadnic s osou *x* (označován φ).



Př. 2: Zakresli do kartézských souřadnic vektory $\boldsymbol{F}_1 = (4;3)$, $\boldsymbol{F}_2 = (3;-5)$, $\boldsymbol{F}_3 = (0;-4)$. Dokresli do obrázku sílu $\boldsymbol{F}_4$, která svírá s osou *x* úhel $120°$ a má velikost 5 N.



Př. 3: Rozlož vektory na obrázku na jejich složky.



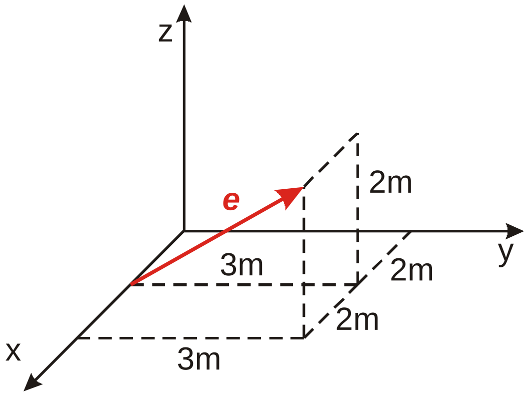
Určíme souřadnice koncových bodů jednotlivých vektorů (stejně jako v předminulé hodině).

$\boldsymbol{a} = (4;3;0)$

$\boldsymbol{b} = (2;3;3)$

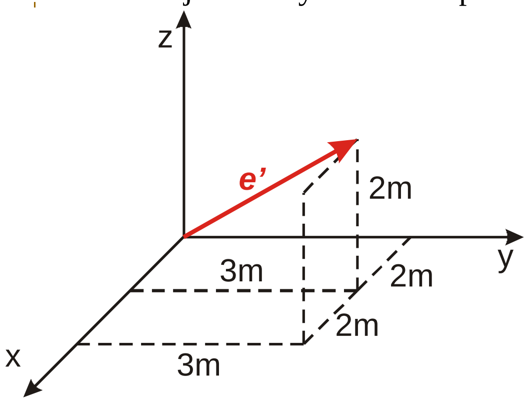
$\boldsymbol{c} = (2;-2;4)$

Př. 4: (BONUS) Najdi složky vektoru $\boldsymbol{e}$.



Problém: Vektor nemá počátek v počátku soustavy souřadnic, dvě možnosti řešení:

- přesuneme vektor do počátku a odečteme souřadnice přesunutého vektoru,
- neodečítáme polohu koncového bodu, ale pouze rozdíl, o kolik se vektor posunul ve směru jednotlivých os mezi počátečním a koncovým bodem.



$\boldsymbol{e} = (2;3;2)$

Př. 5: (BONUS) Urči velikost vektoru $\boldsymbol{e}$.

Použijeme Pythagorovu větu:
$|\boldsymbol{e}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

Proč rozkládáme vektory na složky?
x-ové složky všech vektorù jsou spolu rovnoběžné $\Rightarrow$ snadno je můžeme sčítat jako čísla. To samé platí i pro ostatní složky.

Př. 6: Urči vektory $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, jestliže platí $\boldsymbol{a} = (4;3;0)$, $\boldsymbol{b} = (2;3;3)$, $\boldsymbol{c} = (2;-2;4)$.

a) $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ b) $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$ c) $\boldsymbol{m} = 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

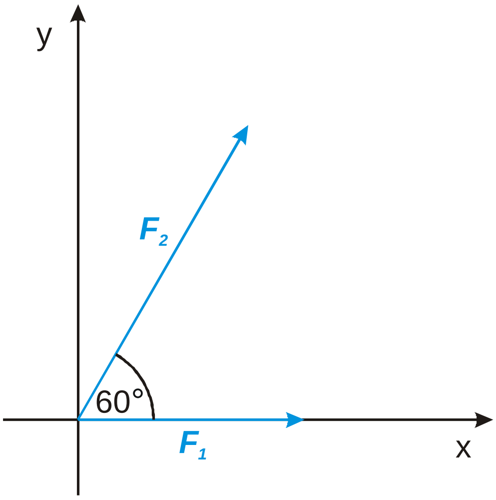
a) $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (4;3;0) + (2;3;3) = (4+2;3+3;0+3) = (6;6;3)$

b) $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} = (2;-2;4) - (2;3;3) = (2-2;-2-3;4-3) = (0;-5;1)$

c) $\boldsymbol{m} = 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 3\cdot(4;3;0) - 2\cdot(2;3;3) + (2;-2;4) = (12;9;0) - (4;6;6) + (2;-2;4) =$
$= (10;1;-2)$

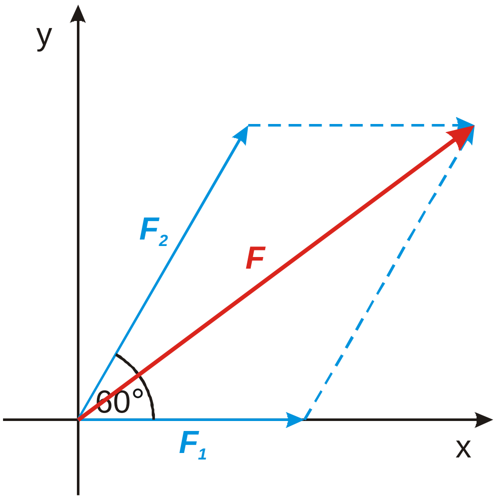
Př. 7: Síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ o velikostech $|\boldsymbol{F}_1| = 10\ \text{N}$ a $|\boldsymbol{F}_2| = 15\ \text{N}$ spolu svírají úhel $60°$. Urči velikost jejich výslednice a úhel, který tato síla svírá se silou $\boldsymbol{F}_1$.

Nejdříve musíme určit složky obou vektorů $\Rightarrow$ musíme zvolit soustavu souřadnic, naštěstí můžeme libovolně $\Rightarrow$ zvolíme souřadnice tak, aby osa *x* měla stejný směr jako síla $\boldsymbol{F}_1$.



Určíme složky vektorů:

- $F_{1x} = 10\ \text{N}$
- $F_{1y} = 0\ \text{N}$
- $\cos\alpha = \dfrac{F_{2x}}{F_2} \Rightarrow F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha = 15 \cdot \cos 60°\ \text{N} \doteq 7{,}5\ \text{N}$
- $\sin\alpha = \dfrac{F_{2y}}{F_2} \Rightarrow F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha = 15 \cdot \sin 60°\ \text{N} \doteq 13\ \text{N}$



Určíme složky vektoru $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$:

- $F_x = F_{1x} + F_{2x} = 10 + 7{,}5\ \text{N} = 17{,}5\ \text{N}$,
- $F_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 + 13\ \text{N} = 13\ \text{N}$.

Velikost vektoru $\boldsymbol{F}$: $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{17{,}5^2 + 13^2}\ \text{N} = 21{,}8\ \text{N}$.

Úhel, který síla $\boldsymbol{F}$ svírá s osou *x*: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{F_y}{F_x} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{F_y}{F_x}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{13}{17{,}5}\right) = 36°37'$.

Výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ má velikost 21,8 N a se silou $\boldsymbol{F}_1$ svírá úhel $\alpha = 36°37'$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je nutné kontrolovat po krocích (zvolení soustavy, rozklad vektorů, sečtení složek, velikost a úhel výsledného vektoru). Zvolení soustavy je pro žáky komplikované tím, že mají volnost, která jim většinou překáží. Část žáků pak má problémy s tím, že se při výpočtu souřadnic síly $\boldsymbol{F}_2$ nepoužívá síla $\boldsymbol{F}_1$. Příčina je v tom, že nedokáží při řešení příkladu rozlišovat jednotlivé části řešení a neuvědomují si, že při rozkladu síly $\boldsymbol{F}_2$ je síla $\boldsymbol{F}_1$ vůbec nezajímá. Je dobré si uvědomit, že tento problém je více obecný než fyzikální.

Př. 8: Síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ o velikostech $|\boldsymbol{F}_1| = 510\ \mathrm{N}$ a $|\boldsymbol{F}_2| = 440\ \mathrm{N}$ svírají s osou *x* úhly $\alpha_1 = 70°$ a $\alpha_2 = 160°$. Ve stejném místě působí i síla $\boldsymbol{F}_3 = (443; -335)$. Urči výslednici (součet) těchto sil (velikost a úhel, který tato síla svírá s osou *x*).

Nejdříve musíme určit složky sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$.
Určíme složky jednotlivých sil:

- $\cos\alpha_1 = \frac{F_{1x}}{F_1} \Rightarrow F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 510 \cdot \cos 70°\ \mathrm{N} \doteq 174\ \mathrm{N}$
- $\sin\alpha_1 = \frac{F_{1y}}{F_1} \Rightarrow F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 510 \cdot \sin 70°\ \mathrm{N} \doteq 479\ \mathrm{N}$
- $\cos\alpha_2 = \frac{F_{2x}}{F_2} \Rightarrow F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 440 \cdot \cos 160°\ \mathrm{N} \doteq -413\ \mathrm{N}$
- $\sin\alpha_2 = \frac{F_{2y}}{F_2} \Rightarrow F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 440 \cdot \sin 160°\ \mathrm{N} \doteq 150\ \mathrm{N}$
- $F_{3x} = 443\ \mathrm{N}$
- $F_{3y} = -335$

Určíme složky výslednice $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$:

- $F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 174 + (-413) + 443\ \mathrm{N} = 204\ \mathrm{N}$,
- $F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 479 + 150 - 335\ \mathrm{N} = 294\ \mathrm{N}$.

Velikost výslednice $\boldsymbol{F}$: $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{204^2 + 294^2}\ \mathrm{N} = 358\ \mathrm{N}$.

Úhel, který síla $\boldsymbol{F}$ svírá s osou *x*: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \alpha = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{294}{204}\right) = 55°15'$.

Výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ má velikost 358 N a s osou *x* svírá úhel $\alpha = 55°15'$.

Shrnutí: Se složkami vektorů můžeme pracovat jako s čísly.